Adı Soyadı :

Numara :

30.11.2022

MAT 301 DİFERENSİYEL GEOMETRİ I ARASINAV SORULARI

SORU 1: $P_0=(a_1,a_2)$, $P_1=(a_1+\cos\theta,a_2+\sin\theta)$, $P_2=(a_1-\sin\theta,a_2+\cos\theta)$ olmak üzere $\{P_0,P_1,P_2\}$ nokta cümlesinin IR^2 de bir Öklid çatı olduğunu gösteriniz.

SORU 2: $\vec{V}=(2,2,-1)\in IR^3$, $P=\left(\frac{\pi}{2},0;\frac{\pi}{2}\right)\in E^3$ verilsin. $f=x_1^2\cos x_2+x_3^2$ fonksiyonu için $\vec{V_P}[f]$ yi bulunuz.

SORU 3: $\forall f,g\in C(E^n,IR)$ ve $\forall \vec{v_p}\in T_{E^n}(P)$ için

$$\vec{v_p}[fg]=g(p)\vec{v_p}[f]+f(p)\vec{v_p}[g]$$

olduğunu gösteriniz.

SORU4: $\alpha:I\to E^n$ eğrisi için $\alpha'(t)|_{\alpha(t)}=T_{\alpha(t)}$ olsun. α eğrisi boyunca $D_TT=0$ ise α eğrisinin bir doğru olduğunu gösteriniz.

SORU 5: IR^3 de vektörel çarpımı tanımlayınız ve Jakobi özdeşliğini sağladığını gösteriniz.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

Dif. Geo I Cevap Anahtarı (30.11.2022)

1) $P_oP_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$

$P_oP_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$\Rightarrow \lambda_1 P_oP_1 + \lambda_2 P_oP_2 = \vec{0}$

$\Rightarrow \lambda_1(\cos\theta, \sin\theta) + \lambda_2(-\sin\theta, \cos\theta) = \vec{0}$

$\cos\theta / \lambda_1\cos\theta - \lambda_2\sin\theta = 0$

$\sin\theta / \lambda_1\sin\theta + \lambda_2\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \lambda_1(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$

$\langle \vec{P_oP_1}, \vec{P_oP_2} \rangle = 0, \quad \|\vec{P_oP_1}\| = \|\vec{P_oP_2}\| = 1$

O halde $\{P_o, P_1, P_2\}$ bir öklid çatısıdır.

2) $$\vec{V}_p[f] = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p v_i$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_p v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_p v_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\Big|_p v_3$$

$$= 2x_1(p)\cos x_2(p)\, v_1 + (-x_1^2(p)\sin x_2(p))v_2 + 2x_3(p)v_3$$

$$= 2p_1\cos p_2 \cdot 2 - p_1^2 \sin p_2\, 2 + 2p_3(-1)$$

$$= 2\frac{\pi}{2}\cos 0 \cdot 2 - \frac{\pi^2}{4}\sin 0 \cdot 2 + 2\frac{\pi}{2}(-1)$$

$$= 2\pi - 0 - \pi$$

$$= \pi$$

3) Defterde Teorem

4) Defterde Uygulama

5) $\alpha \wedge \beta = \sum_{i=1}^{3} \det(e_i, \alpha, \beta) e_i$, $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) + \beta \wedge (\gamma \wedge \alpha) + \gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) = 0$?

$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \gamma$ yukarıdaki ifade eşitliği kullanılarak açılırsa

$$\dot{J} = \langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \gamma + \langle \beta, \alpha \rangle \gamma - \langle \beta, \gamma \rangle \alpha + \langle \gamma, \beta \rangle \alpha - \langle \cancel{\gamma}, \alpha \rangle \beta$$

$= 0$ bulunur.